Cevap Anahtarı

İdeal Teori Sınavı Soruları 21.11.2019

1- Nilpotent elemanı tarif ediniz ve bir R halkasının bütün nilpotent elemanlarının bir ideal olduğunu gösteriniz. (R halkası değişmeli)

2- R değişmeli bir halka ve $\emptyset \neq X' \subset R$ olsun.
$(I:X') = \{ r \in R \mid \forall x \in X' \text{ için } rx \in I \}$ kümesi R'nin bir idealimidir?

3- R, S ve T halkaları için $f: R \to S$ epimorfizma, $g: S \to T$ bir fonksiyon ve $g \circ f: R \to T$ bir homomorfizma ise $g: S \to T$ de bir homomorfizmadır, gösteriniz.

4- Q Rasyonel sayılar cisminin bütün otomorfizmalarını bulunuz.

Not: 1) Her soru eşit puanlıdır.
2) Süre 90 dakikadır.
3) İstediğiniz sorudan başlayabilirsiniz.
4) Soru kağıdına soru cevaplamayınız.
5) Başarılar dilerim.

Prof. Dr. Şenol Eren

1- R bir halka olsun. $a \in R$ için $a^m = 0_R$ olacak şekilde $\exists m \geq 1$ tam sayısı varsa a'ya R'nin nilpotent elemanı denir.
$N = \{ x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x^n = 0_R \}$ $0_R \in N$ olup $N \neq \emptyset$
$a, b \in N \Rightarrow a^m = b^n = 0_R$ olacak şekilde $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ bulunabilir.
R değişmeli olduğundan
$$(a-b)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} (-1)^k \binom{m+n}{k} a^k b^{m+n-k}$$ eşitliğinde $k \geq m$ ise $a^k = 0_R$ $k < m$ ise $m+n-k > n \Rightarrow b^{m+n-k} = 0_R$ olup $(a-b)^{m+n} = 0_R$ yani $a-b \in N$ bulunur.
$\forall a \in R$ ve $\forall x \in N$ için $x^m = 0_R$ olacak şekilde $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ var
$(a \cdot x)^n = a^n \cdot 0_R = 0_R$ olup $ax, xa \in N$ bulunur. (R değişmeli)

2- $0_R \in R$, $\forall x \in X'$ için $0_R . x = 0_R \in I$ olup $(I : X') \neq \emptyset$ dir.
$\forall r, s \in (I : X')$ ise $\forall x \in X'$ için $rx, sx \in I$ dır.
$(r-s)x = rx - sx \in I$ olup $r - s \in (I : X')$ bulunur.
$\forall a \in R$, $\forall r \in (I : X')$ ise $\forall x \in X'$ için $rx \in I$ dır.
$(ar)x = a(rx) \in I$ olup $ar \in (I : X')$ bulunur. $R$ değişmeli olduğundan $ra \in (I : X')$ olup idealdir.

3- $\forall x, y \in S$ için $g(x+y) = g(x) + g(y)$ ve $g(x.y) = g(x) g(y)$ olduğunu göstermeliyiz.
$f : R \longrightarrow S$ ve $f$ örten olduğundan $x = f(a)$, $y = f(b)$ $\exists a, b \in R$ var. $f$ homomorfizma olduğundan

$g(x+y) = g[f(a) + f(b)] = g[f(a+b)] = g \circ f (a+b)$

$g \circ f$ homomorfizma olduğundan

$$(g \circ f)(a+b) = (g \circ f)(a) + (g \circ f)(b) = g(f(a)) + g(f(b))$$
$$= g(x) + g(y)$$

Benzer şekilde

$$g(x.y) = g[f(a).f(b)] = g[f(a.b)] = g \circ f (a.b)$$
$$= (g \circ f)(a) . (g \circ f)(b) = g(f(a)).g(f(b))$$
$$= g(x).g(y)$$

4- $f : Q \longrightarrow Q$ bir otomorfizma olsun.
$f(0) = 0$, $f(1) = 1$ dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$f(n) = f(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ tane}}) = n.f(1) = n$ , $f(-n) = f(n)$

Ayrıca $\forall 0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için $1 = f(1) = f(n. \frac{1}{n}) = f(n).f(\frac{1}{n})$
$= n.f(\frac{1}{n})$ olup $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ bulunur.

$\forall \frac{m}{n} \in Q$ için $f(\frac{m}{n}) = f(m.\frac{1}{n}) = f(m).f(\frac{1}{n})$
$= m.\frac{1}{n} = m/n$

olup $Q$ nun otomorfizmaları sadece birim otomorfizmadır.